

别慌，小场面（二次函数提高）

1. 已知二次函数 $y = (x - h)^2 + 1$ (h 为常数)，在自变量 x 满足 $2 \leq x \leq 4$ 的情况下， y 的最小值为 10，则 h 的值为 _____。

【答案】 -1或7

【解析】 $\because$ 当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大，当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ ①若 $h < 2 \leq x \leq 4$ ， $x = 2$ 时， y 取得最小值 10，

可得： $(2 - h)^2 + 1 = 10$ ，

解得： $h = -1$ 或 $h = 5$ （舍去）；

②若 $2 \leq x \leq 4 < h$ ，当 $x = 4$ 时， y 取得最小值 10，

可得： $(4 - h)^2 + 1 = 10$ ，

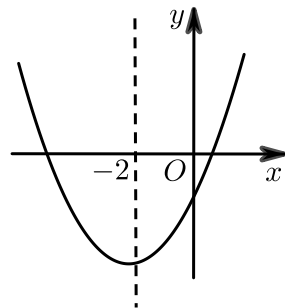
解得： $h = 7$ 或 $h = 1$ （舍去）。

综上， h 的值为 -1 或 7，

故答案为：-1 或 7。

【标注】 【知识点】 给定范围求二次函数最值

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的大致图象如图所示，顶点坐标为 $(-2, -9a)$ ，下列结论：① $4a + 2b + c > 0$. ② $5a - b + c = 0$. ③ 若方程 $a(x + 5)(x - 1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$. ④ 若方程 $|ax^2 + bx + c| = 1$ 有四个根，则这四个根的和为 -4 . 其中正确的结论有 () .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 B

【解析】 $\because$ 抛物线的开口向上， $\therefore a > 0$.

$\because$ 抛物线的对称轴是直线 $x = -2$ ，

$\therefore -\frac{b}{2a} = -2$ 即 $b = 4a$ ，将顶点坐标 $(-2, -9a)$ 代入抛物线的解析式，得

$$4a - 2b + c = -9a.$$

$\therefore c = 2b - 13a$ ，可得 $c = -5a$ 。

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = a(x^2 + 4x - 5)$ ，即 $y = a(x + 5)(x - 1)$ 。

① 当 $x = 2$ 时， $y = 4a + 2b + c = 4a + 8a - 5a = 7a > 0$ ，可知结论①正确；

② $5a - b + c = 5a - 4a - 5a = -4a < 0$ ，可知结论②错误；

③ 将方程变形，得 $x^2 + 4x - 5 + \frac{1}{a} = 0$ ，由求根公式，得 $x = -2 \pm \sqrt{9 - \frac{1}{a}}$ 。当原方程有实数根时 $\sqrt{9 - \frac{1}{a}} < \sqrt{9} = 3$ ，

$$\therefore -\sqrt{9 - \frac{1}{a}} > -3.$$

$$\therefore x_1 = -2 - \sqrt{9 - \frac{1}{a}} > -5, x_2 = -2 + \sqrt{9 - \frac{1}{a}} < 1.$$

$\therefore -5 < x_1 < x_2 < 1$ ，可知结论③正确；

④ 方程 $|ax^2 + bx + c| = 1$ 可变形为 $ax^2 + bx + c = \pm 1$ ，每个一元二次方程的两根之和都等于 $-\frac{b}{a} = -4$ ，

$\therefore$ 此方程的四个根之和是 -8 ，可知结论④错误。

综上所述，结论①③正确，即正确的结论有2个，故选B。

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

3. 已知：抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 经过点 $(-2, 0)$ ，且满足 $9a + 3b + c < 0$ 。以下结论：① $a + b < 0$ ；② $4a + c < 0$ ；③ 对任何的 x ，都有 $y \geq \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$ ；④ $a^2 - 5ab < bc$ 。其中正确的是 ()。

A. ①②③

B. ①②④

C. ②③④

D. ①②③④

【答案】 B

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-2, 0)$ ，

$$\therefore 4a - 2b + c = 0,$$

$$\therefore 9a + 3b + c < 0,$$

$$\text{则 } 9a + 3b + c - (4a - 2b + c) < 0 - 0$$

$$5a + 5b < 0$$

$$5(a + b) < 0$$

$a + b < 0$ ，故①正确；

$$\text{② } \because 3 \times (4a - 2b + c) = 3 \times 0 = 0,$$

$$2 \times (9a + 3b + c) < 2 \times 0 = 0,$$

$$\therefore 2 \times (9a + 3b + c) + 3 \times (4a - 2b + c) < 0 + 0,$$

$$18a + 6b + 2c + 12a - 6b + 3c < 0$$

$$30a + 5c < 0$$

$$5(6a + c) < 0$$

$$6a + c < 0,$$

$$\text{又} \because a > 0,$$

$$\therefore 4a + c < 0, \text{故②正确};$$

$$\textcircled{3} \because 9a + 3b + c < 0,$$

$$\therefore \text{当 } x = 3 \text{ 时, } y < 0,$$

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} > \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即对称轴 } x > \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{该抛物线的最小值不会在 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, 故③错误};$$

$$\textcircled{4} \because 4a - 2b + c = 0,$$

$$\therefore c = 2b - 4a,$$

$$\text{则 } a^2 - 5ab - bc$$

$$= a^2 - 5ab - b(2b - 4a)$$

$$= a^2 - 5ab - 2b^2 + 4ab$$

$$= a^2 - ab - 2b^2$$

$$= (a - 2b)(a + b),$$

$$\because a + b < 0, a > 0,$$

$$\therefore b < 0,$$

$$\therefore a - 2b > 0, a + b < 0,$$

$$\therefore (a - 2b)(a + b) < 0,$$

$$\text{即 } a^2 - 5ab - bc < 0,$$

$$a^2 - 5ab < bc, \text{故④正确};$$

故选B.

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

4. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数).

(1) 若二次函数图象的顶点坐标为 $(-1, -2)$, 求 b 和 c 的值.

(2) 当 $c = \frac{1}{4}b^2 - 2$ 时.

①

若对于任意实数 t ，坐标系中的点 $P(t-1, 2t-6)$ 总不在该函数图象上，求 b 的取值范围．

② 自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b+1$ 时，函数 y 的最大值是6，求此时 b 的值．

【答案】 (1) $b = 2, c = -1$.

(2) ① $b > -1$.

$$\textcircled{2} \quad -\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } -\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} .$$

【解析】 (1) $\because$ 二次函数图象的顶点坐标为 $(-1, -2)$,

$$\therefore y = (x+1)^2 - 2 ,$$

$$\therefore y = x^2 + 2x - 1 ,$$

$$\therefore b = 2, c = -1 .$$

(2) ① $\because$ 点 P 的坐标为 $(t-1, 2t-6)$,

$$\text{令 } t-1 = x, 2t-6 = y ,$$

$$\therefore t = x+1 ,$$

$$\therefore y = 2(x+1) - 6 = 2x - 4 ,$$

$$\therefore \text{点 } P(t-1, 2t-6) \text{ 在直线 } y = 2x - 4 \text{ 上 ,}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 不在函数 } y = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - 2 \text{ 图象上 ,}$$

$$\therefore \text{直线 } y = 2x - 4 \text{ 与抛物线 } y = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - 2 \text{ 没有交点 ,}$$

$$\therefore \text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - 2 \end{cases} ,$$

$$\therefore x^2 + (b-2)x + \frac{1}{4}b^2 + 2 = 0 ,$$

$$\therefore \Delta = (b-2)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{1}{4}b^2 + 2 \right) < 0 ,$$

$$\text{整理得 : } b^2 - 4b + 4 - b^2 - 8 < 0 ,$$

$$4b > -4 ,$$

$$b > -1 ,$$

$$\therefore b \text{ 的取值范围是 } b > -1 .$$

$$\textcircled{2} \quad \therefore y = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}b \right)^2 - 2 ,$$

$$\therefore \text{抛物线对称轴为 } x = -\frac{1}{2}b ,$$

$$\text{当 } -\frac{b}{2} \leq \frac{b+b+1}{2} \text{ 时 ,}$$

$$\text{即 } b \geq -\frac{1}{3} \text{ 时 , 当 } x = b+1 \text{ 时取得最大值 ,}$$

$$\left(b+1 + \frac{1}{2}b \right)^2 - 2 = 6 ,$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{3}{2}b + 1 \right)^2 = 8, \\
& \frac{3}{2}b + 1 = \pm 2\sqrt{2}, \\
& \frac{3}{2}b = -1 \pm 2\sqrt{2}, \\
& b = -\frac{2}{3} \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, \\
& b_1 = -\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}, b_2 = -\frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (舍)}, \\
& \text{即 } b < -\frac{1}{3} \text{ 时, 当 } x = b \text{ 时取得最大值,} \\
& \therefore \left(b + \frac{1}{2}b \right)^2 - 2 = 6, \\
& \therefore \left(\frac{3}{2}b \right)^2 = 8, \\
& \therefore \frac{9}{4}b^2 = 8, \\
& \therefore b^2 = \frac{32}{9}, \\
& \therefore b = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, \\
& \therefore b_1 = \frac{-4\sqrt{2}}{3}, b_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (舍)}, \\
& \therefore b \text{ 的值为 } -\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ 或 } -\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】定直线（线段）与动抛物线交点问题

5. 已知关于 x 的方程 $mx^2 - (3m - 1)x + 2m - 2 = 0$.

(1) 求证：无论 m 取任何实数时，方程恒有实数根.

(2) 若关于 x 的二次函数 $y = mx^2 - (3m - 1)x + 2m - 2$ 的图象与 x 轴两交点间的距离为2时，求抛物线的解析式.

(3) 在同一直角坐标系 xOy 中，画出(2)中函数图象示意图，结合图象解决问题：当直线 $y = x + b$ 与(2)中的函数图象只有两个交点时，求 b 的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $y_1 = x^2 - 2x$ 或 $y_2 = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}$.

(3) $b < -\frac{9}{4}$ 或 $b > -\frac{23}{12}$ 时或 $b = -2$.

【解析】(1) ①当 $m = 0$ 时，方程为 $x - 2 = 0$ ，解得 $x = 2$ ，

$\therefore m = 0$ 时，方程有实数根.

②当 $m \neq 0$ 时，

则一元二次方程的根的判别式，

$$\begin{aligned}
\Delta &= [-(3m-1)]^2 - 4m(2m-2) \\
&= 9m^2 - 6m + 1 - 8m^2 + 8m \\
&= m^2 + 2m + 1 \\
&= (m+1)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $m \neq 0$ 时, 方程有实数根,

故无论 m 取任何实数时, 方程恒有实数根.

(2) 设 x_1, x_2 为抛物线 $y = mx^2 - (3m-1)x + 2m-2$ 与 x 轴两交点的横坐标,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{3m-1}{m}, \quad x_1 x_2 = \frac{2m-2}{m},$$

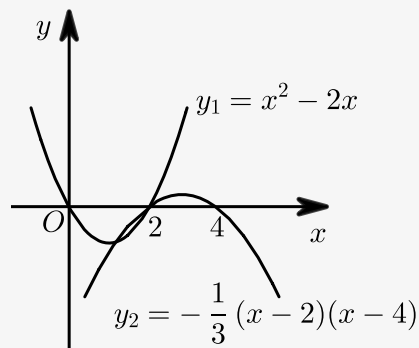
$$\begin{aligned}
\text{则 } |x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\
&= \sqrt{\frac{9m^2 - 6m + 1}{m^2} - \frac{8m^2 - 8m}{m^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m^2 + 2m + 1}{m^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)^2}{m^2}} \\
&= \left| \frac{m+1}{m} \right|,
\end{aligned}$$

$$\text{由 } |x_1 - x_2| = 2, \text{ 得 } \left| \frac{m+1}{m} \right| = 2,$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{m+1}{m} &= 2 \text{ 或 } \frac{m+1}{m} = -2, \\
\therefore m &= 1 \text{ 或 } m = -\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{所求解析式为 } y_1 = x^2 - 2x \text{ 或 } y_2 = -\frac{1}{3}(x-2)(x-4) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}.$$

(3) 在 (2) 的条件下 $y = x + b$ 与抛物线 y_1, y_2 组成的图象只有两个交点,



结合图像求 b 的取值范围. 当 $y = y_1$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y_1 = x^2 - 2x \\ y = x + b \end{cases},$$

$$\text{得: } x^2 - 3x - b = 0 \text{ 有 } \Delta = 9 + 4b = 0,$$

$$\text{得 } b = -\frac{9}{4},$$

同理, 当 $y = y_2$ 时,

$$\text{联立 } \begin{cases} y_2 = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3} \\ y = x + b \end{cases},$$

得： $-\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{8}{3} - b = 0$ ，
 有 $\Delta = 9 - 4(8 + 3b) = 0$ ，得 $b = -\frac{23}{12}$ ，
 由图像可知，当 $b < -\frac{9}{4}$ 或 $b > -\frac{23}{12}$ 时，
 直线 $y = x + b$ 与(2)中的函数图象只有两个交点，
 联立 $\begin{cases} y_1 = x^2 - 2x \\ y_2 = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3} \end{cases}$ ，
 当 $y_1 = y_2$ 时，
 解得有 $x = 2$ 或 $x = 1$ ，
 当 $x = 1$ 时， $y = -1$ ，
 $\therefore$ 过抛物线交点 $(1, -1)$ ， $(2, 0)$ 的直线为 $y = x - 2$ ，
 综上所述，当 $b < -\frac{9}{4}$ 或 $b > -\frac{23}{12}$ 时或 $b = -2$ 时，
 直线 $y = x + b$ 与(2)中的函数图象只有两个交点。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + 2bx - 3$ 的对称轴为直线 $x = 2$ 。

(1) 求 b 的值。

(2) 在 y 轴上有一动点 $P(0, m)$ ，过点 P 作垂直 y 轴的直线交抛物线于点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，其中 $x_1 < x_2$ 。

① 当 $x_2 - x_1 = 3$ 时，结合函数图象，求出 m 的值。

② 把直线 PB 下方的函数图象，沿直线 PB 向上翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新的图象 W ，新图象 W 在 $0 \leq x \leq 5$ 时， $-4 \leq y \leq 4$ ，求 m 的取值范围。

【答案】(1) $b = 2$ 。

(2) ① $m = -\frac{5}{4}$ 。

② $-4 \leq m \leq -2$ 。

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + 2bx - 3$ 的对称轴为直线 $x = 2$ ，

$\therefore b = 2$ 。

(2) ① $\because$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 4x - 3$ ，

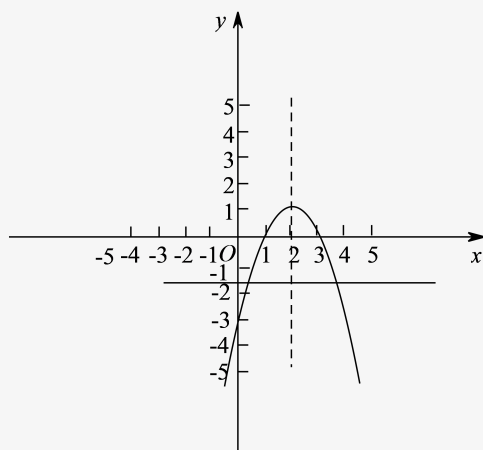
$\therefore A(x_1, y)$ ， $B(x_2, y)$ ，

$\therefore$ 直线 AB 平 x 轴。

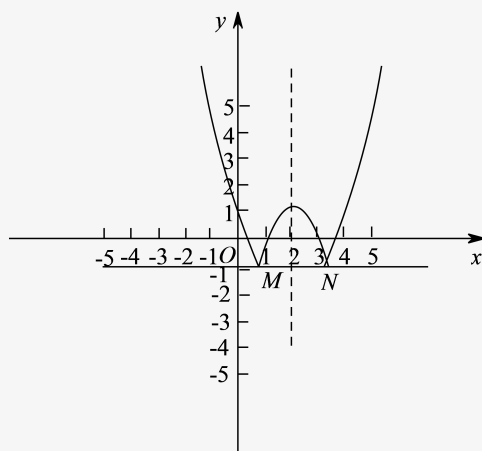
$\therefore x_2 - x_1 = 3$ ，

$\therefore AB = 3$ 。

$$\begin{aligned} \therefore \text{对称轴为 } x &= 2, \\ \therefore AC &= \frac{1}{2}, \\ \therefore \text{当 } x &= \frac{1}{2} \text{ 时, } y = m = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$



② 如图所示：



$$\begin{aligned} \text{当 } y = m = -4 \text{ 时, } 0 \leq x \leq 5 \text{ 时, } -4 \leq y \leq 1, \\ \text{当 } y = m = -2 \text{ 时, } 0 \leq x \leq 5 \text{ 时, } -2 \leq y \leq 4, \\ \therefore m \text{ 的取值范围为 } -4 \leq m \leq -2. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点